

## 第4章 | 図形と計量



### 第1節 三角比

#### 1 三角比

#### A 正弦・余弦・正接

まとめ

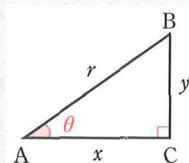
##### 三角比の定義

右の図のような、 $\angle BAC$  が鋭角である直角三角形において、 $\angle BAC$  の大きさを  $\theta$  とすると

正弦 (サイン sine)  $\sin \theta = \frac{y}{r}$

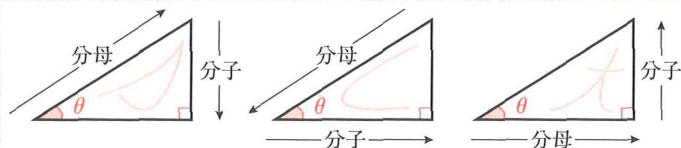
余弦 (コサイン cosine)  $\cos \theta = \frac{x}{r}$

正接 (タンジェント tangent)  $\tan \theta = \frac{y}{x}$



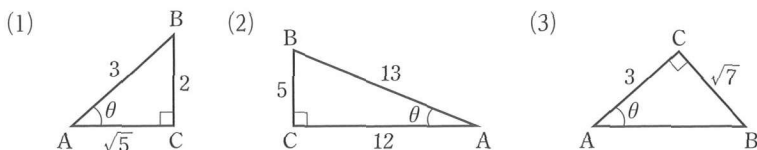
正弦, 余弦, 正接をまとめて三角比という。

**注意 1** 三角比は、頭文字の s, c, t をとって、次のように覚えることもできる。ただし、 $s$ ,  $c$  はそれぞれ s, t の筆記体を表し、矢印が、その書き順に合わせてある。



2  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  の範囲の角  $\theta$  を鋭角という。

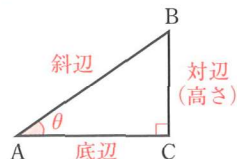


練習  
1下の図において、 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  の値を、それぞれ求めよ。指針  $\theta$  の正弦, 余弦, 正接

右の図の直角三角形 ABC において、 $\theta$  と直角にはさまれた辺 AC を底辺、辺 BC を対辺 (高さ)、辺 AB を斜辺という。

三角比の定義にあてはめると

$$\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$$



解答 (1)  $\sin \theta = \frac{2}{3}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  答

(2)  $\sin \theta = \frac{5}{13}, \quad \cos \theta = \frac{12}{13}, \quad \tan \theta = \frac{5}{12}$  答

(3)  $AB = \sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16} = 4$

であるから

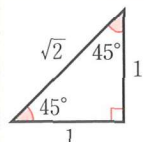
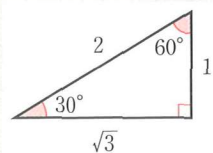
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos \theta = \frac{3}{4}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$
 答

B  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の三角比 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の三角比

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



## まとめ

4  
章

## 図形と計量

練習  
2

右の表の空らんに適する数値を入れて、表を完成させよ。

| $\theta$      | $30^\circ$    | $45^\circ$           | $60^\circ$ |
|---------------|---------------|----------------------|------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$ |                      |            |
| $\cos \theta$ |               | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |            |
| $\tan \theta$ |               |                      | $\sqrt{3}$ |

教 p.130

指針  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  の三角比 教科書 130 ページの図 [1], [2] の 2 つの三角形の辺の長さの比を利用して求める。三角形の向きに注意する。用いる角を底辺の左端、直角を底辺の右端となる直角三角形を使う。

解答 答

| $\theta$      | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\tan \theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |

## C 三角比の表

まとめ

## 三角比の表

$0^\circ$  から  $90^\circ$  までの三角比の値が教科書巻末の見返しに載っている。この数値は小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで示した近似値である。

練習  
3

次の値を三角比の表から求めよ。

(1)  $\sin 12^\circ$

(2)  $\cos 48^\circ$

(3)  $\tan 75^\circ$

教 p.131

指針 三角比の表の利用 教科書巻末見返しの三角比の表を用いて求める。

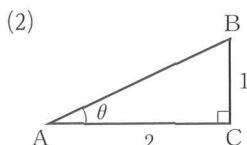
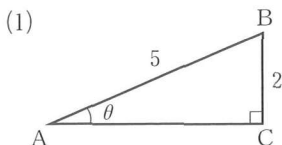
解答 (1)  $\sin 12^\circ = 0.2079$  答

(2)  $\cos 48^\circ = 0.6691$  答

(3)  $\tan 75^\circ = 3.7321$  答

練習  
4

下の図における  $\theta$  のおよその大きさを、三角比の表を用いて求めよ。



指針 三角比の表から  $\theta$  のおよその大きさを求める

(1) は  $\sin \theta$  の値, (2) は  $\tan \theta$  の値から求める。ただし、その値が表にないときは、その値の前後の値を調べて、近い方の値に対する角の大きさを  $\theta$  とする。

解答 (1) 問題の図から

$$\sin \theta = \frac{2}{5} = 0.4$$

三角比の表から、 $\sin \theta$  の値が 0.4 に近い  $\theta$  を求めると

$$\theta \doteq 24^\circ \quad \text{答}$$

(2) 問題の図から

$$\tan \theta = \frac{1}{2} = 0.5$$

三角比の表から、 $\tan \theta$  の値が 0.5 に近い  $\theta$  を求めると

$$\theta \doteq 27^\circ \quad \text{答}$$

注意  $a \doteq b$  は、「 $a$  と  $b$  がほぼ等しい」ということを意味する。

## D 三角比の応用

## まとめ

## 正弦・余弦・正接の応用

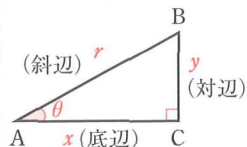
直角三角形 ABC において、1 辺の長さと  $\theta$  の大きさがわかると、他の辺の長さは三角比の値を用いて求められる。

右の図で

(1) 斜辺  $r$  と  $\sin \theta$  の値から  $y = r \sin \theta$

(2) 斜辺  $r$  と  $\cos \theta$  の値から  $x = r \cos \theta$

(3) 底辺  $x$  と  $\tan \theta$  の値から  $y = x \tan \theta$



練習  
5

教科書例題 1 において、水平方向には何 m 進むことになるか。  
1 m 未満を四捨五入して求めよ。

**指針** 余弦の応用 水平方向であるから  $\cos 19^\circ = 0.9455$  を用いる。

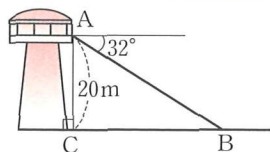
**解答** 教科書 p. 132 例題 1 の図において

$$\begin{aligned} AC &= AB \cos 19^\circ \\ &= 100 \times 0.9455 \\ &= 94.55 \\ &\approx 95 \end{aligned}$$

よって、水平方向に 95 m 進むことになる。 **答**

練習  
6

地上からの高さ 20 m の地点 A で地上の場所 B を見下ろしたら、その角は右の図のように水平面に対して  $32^\circ$  であった。B は、A の真下の地点 C から何 m 離れているか。1 m 未満を四捨五入して求めよ。

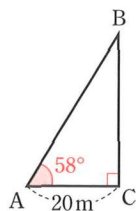


**指針** 三角比の応用 求めるものは、線分 BC の長さであるから、直角三角形 ABC に注目する。

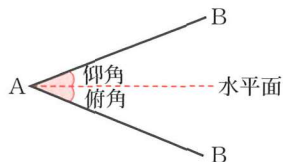
**解答**  $\angle BAC = 90^\circ - 32^\circ$   
 $= 58^\circ$

$$\begin{aligned} \text{よって } BC &= 20 \tan 58^\circ &< \tan 58^\circ = \frac{BC}{20} \\ &= 20 \times 1.6003 \\ &= 32.006 \end{aligned}$$

**答** 32 m



**注意** 測量などで、点 A から点 B を見るとき、A を通る水平面と AB とのなす角を、B が水平面より上にあるならば **仰角** びようかく といい、下にあるならば **俯角** ふかく という。



## 2 三角比の相互関係

### A 三角比の相互関係

まとめ

#### 三角比の相互関係

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

**注意**  $n$  が 2 以上の整数のとき  $(\sin \theta)^n$  を  $\sin^n \theta$  と書く。  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  についても同様に  $\cos^n \theta$ ,  $\tan^n \theta$  と書く。

## 4 章

図形と計量

### 練習

7

$\theta$  は鋭角とする。  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。

教 p.135

**指針**  $\cos \theta$  の値から  $\sin \theta$ ,  $\tan \theta$  の値を求める  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を利用する。

$\theta$  は鋭角であるから,  $\sin \theta > 0$  に注意する。  $\tan \theta$  は  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  から求められる。

(別解)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から,  $\tan \theta$ ,  $\sin \theta$  の値の順に求めてもよい。

**解答**  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから } \sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

**別解**  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\tan^2 \theta = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1 = 9 - 1 = 8$

$$\theta \text{ は鋭角であるから } \tan \theta > 0 \text{ であり } \tan \theta = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$



練習  
8

$\theta$  は鋭角とする。  $\tan \theta = \sqrt{2}$  のとき、  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の値を求めよ。

指針  $\tan \theta$  の値から  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  の値を求める  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  を利用して、  
 $\cos \theta$  の値を求める。このとき、  $\cos \theta > 0$  に注意する。  $\sin \theta$  は  
 $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta$  から求められる。

解答  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から

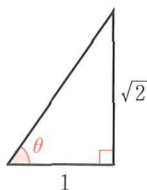
$$1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{よって } \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta > 0 \text{ であるから } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{答}$$

また  $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{答}$$

B  $90^\circ - \theta$  の三角比

まとめ

 $90^\circ - \theta$  の三角比

$\theta$  が鋭角、すなわち  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

練習  
9

次の□に適する鋭角の角度を入れよ。

(1)  $\sin 62^\circ = \cos \square$

(2)  $\cos 78^\circ = \sin \square$

(3)  $\tan 23^\circ \tan \square = 1$

指針  $90^\circ - \theta$  の三角比 公式を変形して、 $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ ,  
 $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$ ,  $\tan \theta \tan(90^\circ - \theta) = 1$  の形で考える。

解答 (1)  $\sin 62^\circ = \cos(90^\circ - 62^\circ) = \cos \boxed{28^\circ} \quad \text{答}$

(2)  $\cos 78^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ) = \sin \boxed{12^\circ} \quad \text{答}$

(3)  $\tan 23^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ) = \tan 23^\circ \tan \boxed{67^\circ} = 1 \quad \text{答}$

練習  
10次の三角比を  $45^\circ$  以下の角の三角比で表せ。

- (1)
- $\sin 64^\circ$
- (2)
- $\cos 58^\circ$
- (3)
- $\tan 83^\circ$

指針  $90^\circ - \theta$  の三角比  $64^\circ = 90^\circ - 26^\circ$ ,  $58^\circ = 90^\circ - 32^\circ$ ,  $83^\circ = 90^\circ - 7^\circ$  から。解答 (1)  $\sin 64^\circ = \sin(90^\circ - 26^\circ) = \cos 26^\circ$  答(2)  $\cos 58^\circ = \cos(90^\circ - 32^\circ) = \sin 32^\circ$  答(3)  $\tan 83^\circ = \tan(90^\circ - 7^\circ) = \frac{1}{\tan 7^\circ}$  答

## 深める

教科書巻末の見返しの三角比の表について、 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$  からわかる  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値の並び方の規則を説明してみよう。

解答  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$  において、 $\theta = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \dots, 90^\circ$  を代入すると  
 $\cos 90^\circ = \sin 0^\circ$ ,  $\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$ ,  $\cos 88^\circ = \sin 2^\circ$ ,  $\dots$ ,  $\cos 0^\circ = \sin 90^\circ$   
 すなわち、三角比の表の  $\sin \theta$  の列の  $0^\circ$  から  $90^\circ$  までの値の並びと、 $\cos \theta$  の列の  $90^\circ$  から  $0^\circ$  までの値の並びが一致している。 答

## 4章

## 図形と計量

## 3 三角比の拡張

## A 座標を用いた三角比の定義

## まとめ

1  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲にある  $\theta$  の三角比の定義

原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の半円の周上に  $A(r, 0)$ ,  $\angle AOP = \theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) となる点  $P(x, y)$  をとると

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{ただし} \quad 0 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

## 2 三角比の符号とそのとる値の範囲

| $\theta$      | $0^\circ$ | 鋭角 | $90^\circ$ | 鈍角 | $180^\circ$ | とる値の範囲                       |
|---------------|-----------|----|------------|----|-------------|------------------------------|
| $\sin \theta$ | 0         | +  | 1          | +  | 0           | $0 \leq \sin \theta \leq 1$  |
| $\cos \theta$ | 1         | +  | 0          | -  | -1          | $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ |
| $\tan \theta$ | 0         | +  | /          | -  | 0           | 実数全体                         |

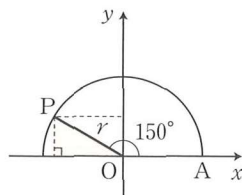
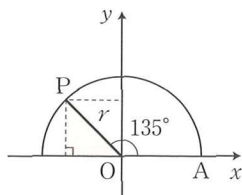
## 練習 11

次の角の正弦, 余弦, 正接の値を, 下の図などを用いて求めよ。

(1)  $135^\circ$ (2)  $150^\circ$ 

$r = \square$  にとると,  
点Pの座標は  $\square$

$r = \square$  にとると,  
点Pの座標は  $\square$



指針 鈍角の三角比の値 空らんのうめ方は無数にある。下の解答では, 点Pの座標が分数にならないように  $r$  の値を決めている。

(1)  $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  より,  $45^\circ$  の角をもつ直角二等辺三角形の3辺の比

$1 : 1 : \sqrt{2}$  を利用すると  $r = \sqrt{2}$ , 点Pの座標は  $(-1, 1)$

(2)  $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$  より,  $30^\circ$  の角をもつ直角三角形の3辺の比

$1 : 2 : \sqrt{3}$  を利用すると  $r = 2$ , 点Pの座標は  $(-\sqrt{3}, 1)$

解答 (1)  $r = \sqrt{2}$  にとると, 点Pの座標は  $(-1, 1)$  であるから

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 135^\circ = -1 \quad \text{答}$$

(2)  $r = 2$  にとると, 点Pの座標は  $(-\sqrt{3}, 1)$  であるから

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{答}$$

補足  $r=1$  なら, (1)  $P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , (2)  $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  となる。

B  $180^\circ - \theta$  の三角比

## まとめ

## 180°-θ の三角比

鈍角と鋭角の三角比の関係として,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の等式が成り立つ。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

練習  
12

次の値を、三角比の表を用いて求めよ。

- (1)
- $\sin 140^\circ$
- (2)
- $\cos 156^\circ$
- (3)
- $\tan 100^\circ$

指針 鈍角の三角比の値 鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すとき、次の関係を利用する。

$$\bigcirc + \square = 180^\circ \text{ のとき}$$

$$\sin \bigcirc = \sin \square, \quad \cos \bigcirc = -\cos \square, \quad \tan \bigcirc = -\tan \square$$

解答 (1)  $140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$  であるから  $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$

三角比の表から  $\sin 40^\circ = 0.6428$  答

(2)  $156^\circ + 24^\circ = 180^\circ$  であるから  $\cos 156^\circ = -\cos 24^\circ$

三角比の表から  $-\cos 24^\circ = -0.9135$  答

(3)  $100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$  であるから  $\tan 100^\circ = -\tan 80^\circ$

三角比の表から  $-\tan 80^\circ = -5.6713$  答

C 三角比の等式を満たす  $\theta$ 

まとめ

三角比の等式を満たす  $\theta$  の大きさ

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。

1.  $\sin \theta = k$  を満たす  $\theta$ 

$0 < k < 1$  ならば、鋭角と鈍角の2つある。

(一方が  $\alpha$  なら、他方は  $180^\circ - \alpha$ )

$k = 0$  ならば  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

$k = 1$  ならば  $\theta = 90^\circ$

2.  $\cos \theta = k$  を満たす  $\theta$ 

$-1 \leq k \leq 1$  ならば、ただ1つある。

3.  $\tan \theta = k$  を満たす  $\theta$ 

$k \neq 0$  ならば ただ1つある。

$k = 0$  ならば  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

練習  
13

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

- (1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$                       (2)  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$                       (3)  $\sin \theta = 0$

指針  $\sin \theta = k$  を満たす  $\theta$  の値,  $\cos \theta = k$  を満たす  $\theta$  の値

- (1)  $\sin \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  より, (斜辺) : (対辺) =  $2 : \sqrt{3}$  であるから, 3 辺の比が  $1 : 2 : \sqrt{3}$  の直角三角形を考える。すなわち, 半径 2 の半円上で,  $y$  座標が  $\sqrt{3}$  となる点である。
- (2) (1) と同様に, 半径 2 の半円上で,  $x$  座標が  $-1$  となる点である。
- (3) 半径 1 の半円上で,  $y$  座標が 0 となる点である。2 つある。

解答 (1) 下の図で, 求める  $\theta$  は,  $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  であるから

$$\theta = 60^\circ, 120^\circ \quad \text{答}$$

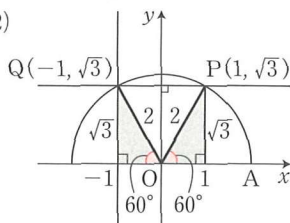
- (2) 下の図で, 求める  $\theta$  は,  $\angle AOQ$  であるから

$$\theta = 120^\circ \quad \text{答}$$

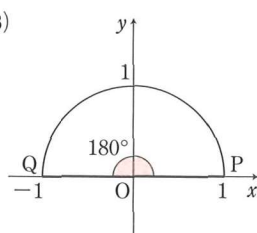
- (3) 下の図で, 求める  $\theta$  は,  $\angle POP$ ,  $\angle POQ$  であるから

$$\theta = 0^\circ, 180^\circ \quad \text{答}$$

- (1), (2)



- (3)



練習  
14

教 p.142

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

(1)  $\tan \theta = 1$

(2)  $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

指針  $\tan \theta = k$  を満たす  $\theta$  の値

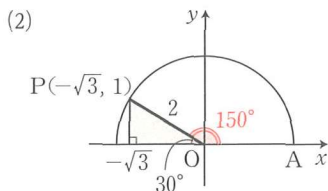
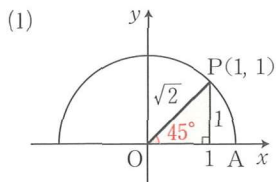
- (1)  $\tan \theta = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = 1$  より, (底辺) : (対辺) =  $1 : 1$  であるから, 3 辺の比が  $1 : 1 : \sqrt{2}$  の直角二等辺三角形を考える。すなわち, 半径  $\sqrt{2}$  の半円上で, 座標が  $(1, 1)$  となる点である。
- (2) 3 辺の比が  $1 : 2 : \sqrt{3}$  の直角三角形を考える。すなわち, 半径 2 の半円上で, 座標が  $(-\sqrt{3}, 1)$  となる点である。

解答 (1) 求める  $\theta$  は, 次ページの図(1)で  $\angle AOP$  である。

よって  $\theta = 45^\circ$  答

- (2) 求める  $\theta$  は, 次ページの図(2)で  $\angle AOP$  である。

よって  $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  答



## D 三角比の相互関係

まとめ

### 三角比の相互関係

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の関係が成り立つ。

$$1 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$2 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

4章

図形と計量

練習  
15

教 p.143

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。 $\sin \theta = \frac{4}{5}$  のとき、 $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。

指針 三角比の相互関係  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  の関係を利用する。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、 $\sin \theta$  の値が 0, 1 以外の値ならば、 $\sin \theta$  の値 1 つに対して  $\theta$  は  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  の 2 つの場合が考えられることに注意する。

解答  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  から、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である。

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき、 $\cos \theta > 0$  であるから

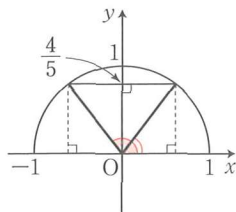
$$\cos \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{答}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3} \quad \text{答}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき、 $\cos \theta < 0$  であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \quad \text{答}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3} \quad \text{答}$$



練習  
16

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち, 1 つが次の値をとるとき, 他の 2 つの値を求めよ。

$$(1) \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \tan \theta = -2$$

## 指針 三角比の相互関係の利用

- (1)  $\cos \theta$  の値が与えられたときは  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  を用いて,  $\sin^2 \theta$  の値を求める。 $\sin \theta \geq 0$  であることから,  $\sin \theta$  の値がわかる。次に,  $\tan \theta$  の値は  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  から求める。

または, (2) と同様に  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\tan \theta$ ,  $\sin \theta$  の順に値を求めてもよい。

- (2)  $\tan \theta$  の値が与えられたときは  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$  を用いて,  $\cos^2 \theta$  の値を求める。

$$\tan \theta > 0 \text{ ならば, } \theta \text{ は鋭角で } \cos \theta > 0$$

$$\tan \theta < 0 \text{ ならば, } \theta \text{ は鈍角で } \cos \theta < 0$$

であるから,  $\cos \theta$  の値がわかる。

次に,  $\sin \theta$  の値は,  $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta$  から求める。

**解答** (1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin \theta \geq 0$  であるから

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

- (2)  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$  から

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}$$

$\tan \theta < 0$  であるから,  $\theta$  は鈍角で  $\cos \theta < 0$

$$\text{よって } \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{答}$$

別解 (1)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\tan^2 \theta = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1 = 9 - 1 = 8$

$\cos \theta < 0$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  では  $\sin \theta > 0$  であるから  $\tan \theta < 0$  であり

$$\tan \theta = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

また  $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -2\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$

## E 直線の傾きと正接

まとめ

### 直線の傾きと正接

原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円と直線  $y = mx$  の交点を  $P(x, y)$ ,  $A$  を  $(1, 0)$  とし,  $\angle AOP = \theta$  とするとき, 直線  $y = mx$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  について  $m = \frac{y}{x} = \tan \theta$

## 4 章

図形と計量

### 練習 17

次の直線と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  を求めよ。

(1)  $y = x$

(2)  $y = -\sqrt{3}x$

教 p.144

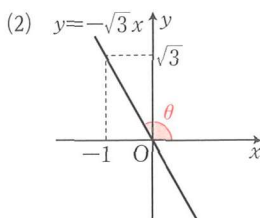
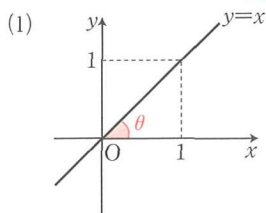
指針 直線の傾きと正接 直線  $y = mx$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角  $\theta$  について,  $m = \tan \theta$  が成り立つ。

解答 (1) 直線の傾きが 1 であるから  $\tan \theta = 1$

よって  $\theta = 45^\circ$  答

(2) 直線の傾きが  $-\sqrt{3}$  であるから  $\tan \theta = -\sqrt{3}$

よって  $\theta = 120^\circ$  答



## 第4章 第1節

## 問題

問題1では、教科書巻末の見返しの三角比の表を用いてよい。

教 p.145

- 1 自転車を押して昇降できるスロープと階段を作る(教科書 p.145 問題1の写真参照)。右の図のように、階段の先端



とスロープが接するように階段を作り、自転車用のスロープの傾斜を $13^\circ$ 、階段の踏面を50 cmにすると、階段の蹴上げを求めよ。ただし、小数第2位を四捨五入せよ。

**指針 三角比と三角比の表の利用** 求めるのは、下の解答の図の直角三角形ABCの辺ABの長さであるから、 $13^\circ$ の正接の値を三角比の表から読み取る。計算では表の値をそのまま使って計算し、計算結果の小数第2位の数値を四捨五入して、小数第1位までの数値を答える。

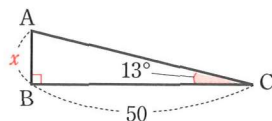
**解答** 蹴上げを  $x$  cm とすると、図から

$$\tan 13^\circ = \frac{x}{50}$$

三角比の表より  $\tan 13^\circ = 0.2309$  であるから

$$x = 50 \tan 13^\circ = 50 \times 0.2309 = 11.545 \div 11.5$$

答 11.5 cm



**注意** 三角比の値  $\tan 13^\circ = 0.2309$  の小数第2位を四捨五入して0.2、これに50を掛けて10 cm、などと答えないように注意する。

教 p.145

- 2  $\triangle ABC$  の3つの内角  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  の大きさを、それぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  とするとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} \quad (2) \sin A = \sin(B+C)$$

**指針 三角比の等式の証明** 右辺を変形して、左辺と一致することを示す。

$A$ ,  $B$ ,  $C$  は  $\triangle ABC$  の3つの内角であるから  $A+B+C=180^\circ$  である。これが利用できる。また、次も利用。

$$(1) \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad (2) \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

**解答** 三角形の内角の和は  $180^\circ$  であるから  $A+B+C=180^\circ$

よって  $B+C=180^\circ-A$

$$(1) \frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ-A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos \frac{B+C}{2} = \cos \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{よって} \quad \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} \quad \text{終}$$

$$(2) \quad \sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\text{よって} \quad \sin A = \sin(B+C) \quad \text{終}$$

教 p.145

3  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  のうち, 1つが次の等式を満たすとき, 他の2つの値を求めよ。

$$(1) \quad 4 \sin \theta = 3$$

$$(2) \quad \tan \theta + 3 = 0$$

指針 三角比の相互関係の利用 次の三角比の相互関係を利用する。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

解答 (1)  $\sin \theta = \frac{3}{4}$  から,  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  または  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である。

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{7}{16}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{答}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{答}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left( -\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{答}$$

(2)  $\tan \theta = -3$  から,  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  である。

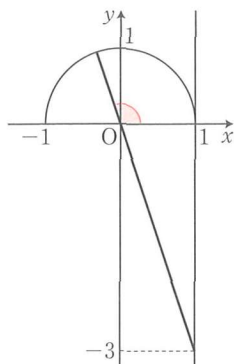
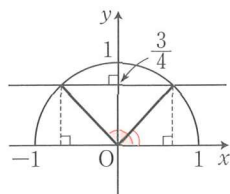
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{から}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  のとき,  $\cos \theta < 0$  であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{答}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -3 \times \left( -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{答}$$



- 4 2直線  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ,  $y = -x$  のなす鋭角  $\theta$  を求めよ。

**指針** 2直線のなす角 まず, 2直線と  $x$  軸の正の向きとのなす角を, 傾き (正接) の値からそれぞれ求める。図をかくとわかりやすい。

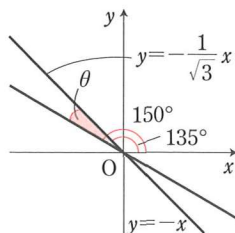
**解答** 直線  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を

$$\alpha \text{ とすると, } \tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ から } \alpha = 150^\circ$$

直線  $y = -x$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\beta$  とすると,  $\tan \beta = -1$  から  $\beta = 135^\circ$

よって, 2直線  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ,  $y = -x$  のなす鋭角

$$\theta \text{ は, 図から } \theta = 150^\circ - 135^\circ = 15^\circ \quad \text{答}$$



- 5 次の三角比の値を, 小さい方から順に並べよ。ただし, 三角比の表は用いないものとする。

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 150^\circ, \quad \sin 170^\circ$$

**指針** 三角比の値の大小  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$  を使って, まず  $\sin 150^\circ$ ,  $\sin 170^\circ$  を鋭角  $\theta$  の  $\sin \theta$  で表す。  $\theta$  が  $0^\circ$  から  $90^\circ$  までなら,  $\sin \theta$  は  $\theta$  にしたがって 0 から 1 まで増加することを図を使って示す。

**解答**  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ ,  $\sin 170^\circ = \sin 10^\circ$  であるから, まず  $\sin 20^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 10^\circ$  の大きさを比較する。

座標平面上に原点  $O$  を中心とする半径 1 の半円をかき, この半円と  $x$  軸の正の部分の交点を  $A$  とする。さらに, 4 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  をそれぞれ

$$\angle AOP = 10^\circ, \quad \angle AOQ = 20^\circ,$$

$$\angle AOR = 30^\circ, \quad \angle AOS = 40^\circ$$

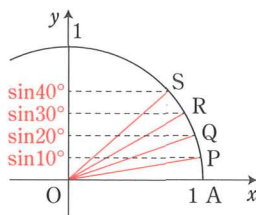
となるようにとる。

このとき, 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  の  $y$  座標がそれぞれ  $\sin 10^\circ$ ,  $\sin 20^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$  であるから

$$\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \sin 40^\circ$$

よって,  $\sin 20^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\sin 170^\circ$  を小さい方から順に並べると

$$\sin 170^\circ, \sin 20^\circ, \sin 150^\circ, \sin 40^\circ \quad \text{答}$$



## 第2節 三角形への応用

## 4 正弦定理

## A 三角形の外接円と正弦

## B 正弦定理

## 1 外接円

三角形の3つの頂点を通る円を、その三角形の外接円という。

## 2 三角形の外接円と正弦

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると  $a = 2R \sin A$

**注意**  $\triangle ABC$  において、頂点  $A, B, C$  に向かい合う辺  $BC, CA, AB$  の長さを、それぞれ  $a, b, c$  で表す。また、 $\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさを、それぞれ  $A, B, C$  で表す。

**解説** [1]  $0^\circ < A < 90^\circ$  のとき

右の図で、線分  $BD$  は  $\triangle ABC$  の外接円の直径とする。このとき、円周角と中心角の性質により

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

また、この円の半径を  $R$  とすると

$$BD = 2R$$

よって、 $\triangle BCD$  において

$$a = 2R \sin A \text{ が成り立つ。}$$

[2]  $A = 90^\circ$  のとき

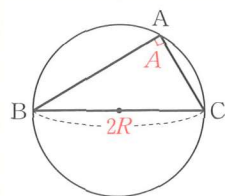
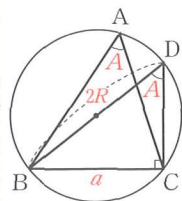
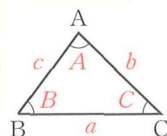
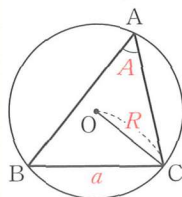
辺  $BC$  は、 $\triangle ABC$  の外接円の直径になる。外接円の半径は  $R$  であるから、 $a = 2R$  である。

一方、 $\sin A = \sin 90^\circ = 1$  であるから

$$a = 2R \sin A$$

が成り立つ。

まとめ



## 4 章

図形と計量

[3]  $90^\circ < A < 180^\circ$  のとき

右の図で、線分 BD は  $\triangle ABC$  の外接円の直径とする。

$\angle BDC = D$  とすると、円周角と中心角の性質により

$$2A + 2D = 360^\circ$$

すなわち  $A + D = 180^\circ$  が成り立つから

$$\sin D = \sin(180^\circ - A) = \sin A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\angle BCD = 90^\circ$ ,  $BD = 2R$  であるから、 $\triangle BCD$  において、 $a = 2R \sin D$  が成り立つ。

よって、 $\textcircled{1}$  により、 $a = 2R \sin A$  が成り立つ。

**補足** 同様にして  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$  も成り立つ。

また、円の性質には、次のようなものがある。

### 1 円周角の定理

- ① 1つの弧に対する円周角はその弧に対する中心角の半分である。

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

- ② 同じ弧に対する円周角は一定である。

$$\angle BAC = \angle BDC$$

- ③ 直径に対する円周角は  $90^\circ$  である。

- 2 円に内接する四角形では、向かい合う角の和は  $180^\circ$  になる。

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

### 3 正弦定理

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

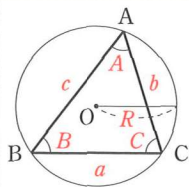
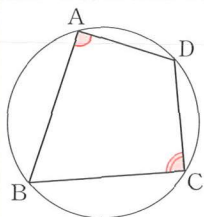
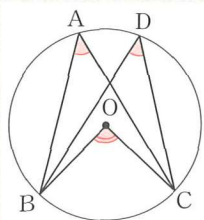
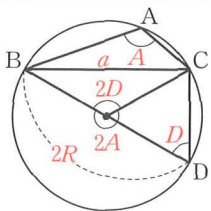
**注意** 1 上の関係式から

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

が成り立つ。

- 2 正弦定理により、三角形の1辺の長さ

と2つの角の大きさから、他の辺の長さを求めることができる。



教 p.148

練習  
18次のような  $\triangle ABC$  において、外接円の半径  $R$  を求めよ。

(1)  $a=5, A=45^\circ$

(2)  $b=\sqrt{3}, B=120^\circ$

指針 正弦定理の利用 正弦定理を利用して、外接円の半径  $R$  を求める。

(1)  $\frac{a}{\sin A}=2R$  (2)  $\frac{b}{\sin B}=2R$

解答 (1)  $\frac{5}{\sin 45^\circ}=2R$  から

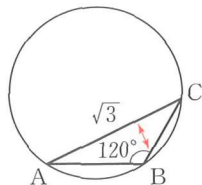
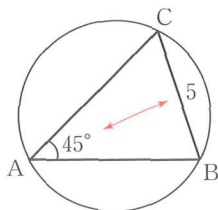
$$R = \frac{5}{2 \sin 45^\circ}$$

$$= \frac{5}{2} \times \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \text{答}$$

(2)  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=2R$  から

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 \quad \text{答}$$

4  
章

図形と計量

教 p.148

練習  
19 $c=10$  である  $\triangle ABC$  において、外接円の半径が  $R=10$  のとき、 $C$  を求めよ。指針 正弦定理の利用  $\frac{c}{\sin C}=2R$  から  $\sin C = \frac{c}{2R}$ 

解答  $\frac{c}{\sin C}=2R$  から  $\sin C = \frac{c}{2R}$

よって  $\sin C = \frac{10}{2 \cdot 10} = \frac{1}{2}$

$0^\circ < C < 180^\circ$  であるから  $C=30^\circ, 150^\circ$  答

教 p.149

練習  
20次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。

(1)  $c=\sqrt{2}, B=30^\circ, C=45^\circ$  のとき  $b$

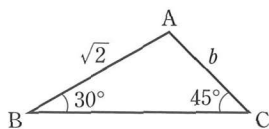
(2)  $a=2, A=45^\circ, C=120^\circ$  のとき  $c$

**指針 正弦定理の利用** 三角形の1辺の長さと2つの角の大きさがわかっている場合には、正弦定理を用いて、他の辺の長さを求めることができる。正弦定理の必要な部分の等式を利用する。

**解答** (1) 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

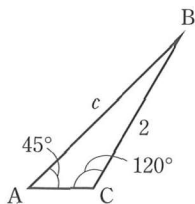
$$\begin{aligned} \text{よって } b &= \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 30^\circ \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{答} \end{aligned}$$



(2) 正弦定理により

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } c &= \frac{2}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 120^\circ \\ &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \quad \text{答} \end{aligned}$$

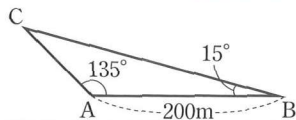


**練習**  
21

教科書 149 ページの図のように、200 m 離れた海岸の2地点 A, B と、島にある地点 C について

$$\angle CAB = 135^\circ, \angle CBA = 15^\circ$$

であった。B, C 間の距離を求めよ。



教 p.149

**指針 正弦定理の利用** 三角形 ABC とみて、辺 BC の長さを求める。  
 $\angle C$  の大きさを求めてから正弦定理を使う。

**解答**  $\triangle ABC$  において  $\angle C = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$

$$\text{正弦定理により} \quad \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{200}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって } BC = \frac{200}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 135^\circ = 200 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$$

したがって、B, C 間の距離は  $200\sqrt{2}$  m **答**

## 5 余弦定理

## A 余弦定理

## 余弦定理

△ABC において、次が成り立つ。

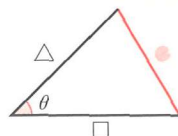
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**注意** 余弦定理により、三角形の2辺の長さとその間の角の大きさから残りの辺の長さが求められる。

まとめ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

## 4 章

図形と計量

## 練習 22

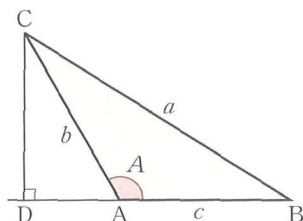
右の図のように、Aが鈍角の場合にも

$$BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

$$CD^2 = (b \sin A)^2,$$

$$BD^2 = (c - b \cos A)^2$$

が成り立つことを確かめよ。



教 p.150

**指針** 余弦定理  $\angle CAD = 180^\circ - A$  であるから、CD, BD を A で表す。

$\sin(180^\circ - A) = \sin A$ ,  $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$  を利用。

**解答** △BCD において、三平方の定理により

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 \quad \text{終}$$

△ACD において

$$CD^2 = \{b \sin(180^\circ - A)\}^2 = (b \sin A)^2 \quad \text{終}$$

$$AD = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A$$

$$\text{よって } BD^2 = (c - b \cos A)^2 \quad \text{終}$$

$$\leftarrow BD = AB + AD$$

## 練習 23

次のような △ABC において、指定されたものを求めよ。

(1)  $a=3$ ,  $c=2\sqrt{2}$ ,  $B=45^\circ$  のとき  $b$

(2)  $a=3$ ,  $b=5$ ,  $C=120^\circ$  のとき  $c$

教 p.151

**指針** 余弦定理の利用 三角形の2辺の長さとその間の角の大きさが与えられているから、余弦定理を用いる。

解答 (1)  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ$

$$= 8 + 9 - 12\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5$$

$b > 0$  であるから  $b = \sqrt{5}$  答

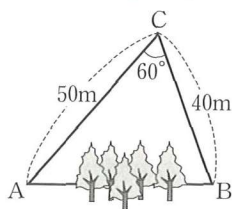
(2)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ$

$$= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$c > 0$  であるから  $c = \sqrt{49} = 7$  答

練習  
24

右の図のように、林をはさんで2地点 A, B  
がある。地点 C から A と B を見て  $\angle ACB$   
を測ると  $60^\circ$  で、また A, C 間の距離は  
50 m, B, C 間の距離は 40 m であった。A,  
B 間の距離を求めよ。



教 p.151

指針 余弦定理の利用 三角形 ABC とみて、余弦定理より辺 AB の長さを求める。

解答 余弦定理により

$$\begin{aligned} AB^2 &= 50^2 + 40^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 2500 + 1600 - 4000 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4100 - 2000 = 2100 \end{aligned}$$

$AB > 0$  であるから

$$AB = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \text{ (m)} \quad \text{答 } 10\sqrt{21} \text{ m}$$

まとめ

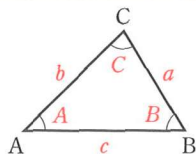
三角形の角の余弦を表す式

余弦定理によると  $\triangle ABC$  において、次が成り立つ。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



教 p.152

練習  
25

次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。

(1)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  のとき A

(2)  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{5}$ ,  $c = \sqrt{2}$  のとき B

指針 三角形の角の余弦を表す式の利用 三角形の3辺の長さが与えられたとき、余弦定理を利用して、まず角の余弦の値を求める。

$$\text{解答 (1) } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって  $A = 30^\circ$  答

$$(2) \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $B = 135^\circ$  答

まとめ

## △ABC の辺と角

| $b^2 + c^2$ と $a^2$ の大小 | $b^2 + c^2 > a^2$ | $b^2 + c^2 = a^2$ | $b^2 + c^2 < a^2$ |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\cos A$ の符号            | $\cos A > 0$      | $\cos A = 0$      | $\cos A < 0$      |
| 角Aの種類                   | Aは鋭角              | Aは直角              | Aは鈍角              |

## 4章

図形と計量

練習  
26

教 p.152

△ABC の3辺の長さが次のようなとき、Aは鋭角、直角、鈍角のいずれであるかを調べよ。

$$(1) a=9, b=3\sqrt{2}, c=7 \quad (2) a=\sqrt{7}, b=\sqrt{6}, c=2$$

指針 三角形の角の余弦を表す式(角Aの種類の判別) △ABCにおいて、上のまとめのように  $\cos A$  の符号から角Aの種類を判別できる。

$$\text{解答 (1) } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 7} = \frac{-14}{42\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$\cos A < 0$  であるから、角Aは 鈍角 答

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\sqrt{6})^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2} = \frac{3}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

$\cos A > 0$  であるから、角Aは 鋭角 答

## コラム 正弦定理・余弦定理

教 p.153

確認 教科書例題7では問題文で三角形の3辺の長さが与えられている。教科書例題6の問題文で与えられている三角形の条件は何だろうか。

解答 2辺の長さとその間の角の大きさが与えられている。 答

**発見** 教科書の例題 7, 例題 6, 例題 5 の順に, 最初に与えられている三角形の条件をまとめてみよう。これらに関連する中学校で学んだ三角形の性質とは何だろうか。

解答

|      | 三角形の条件            |
|------|-------------------|
| 例題 7 | 3 辺の長さ            |
| 例題 6 | 2 辺の長さとその間の角の大きさ  |
| 例題 5 | 1 辺の長さとその2つの角の大きさ |

答

例題 5 について, 2つの角の大きさから残りの角の大きさを求めることができるから, 1 辺の長さとその両端の角の大きさが与えられていると考えることもできる。例題 7 と例題 6 に関しては, 教科書で確認済みである。

したがって, これらの例題で与えられている条件は, 三角形の合同条件と関連しているといえる。答

**まとめ** 上の発見で調べた 3つの条件でないような条件を与えた上で, 教科書の例題 5, 例題 6, 例題 7 のような三角形の辺の長さや角の大きさを求める問題を作ってみよう。そのとき, 答えはどうなるだろうか。

**指針** 条件の与え方によっては三角形が 1つに決まらないこともある。そのような場合を考えてみよう。

**解答**  $a=\sqrt{3}$ ,  $b=1$ ,  $B=30^\circ$  の  $\triangle ABC$  を考えると, 余弦定理により

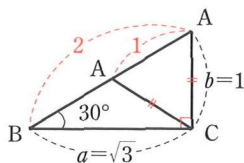
$$\cos 30^\circ = \frac{(\sqrt{3})^2 + c^2 - 1^2}{2\sqrt{3}c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2 + 2}{2\sqrt{3}c}$$

ゆえに  $c^2 - 3c + 2 = 0$

よって  $(c-1)(c-2) = 0$

これを解いて  $c=1, 2$

したがって, 辺 AB の長さが 1 または 2 である 2つの三角形 ABC が考えられる。答



## 6 正弦定理と余弦定理の応用

### A 三角形の辺と角の決定

まとめ

#### 1 三角形の辺と角

次のような条件が与えられたとき、これらの定理とその条件から、三角形の形状を調べることができる。

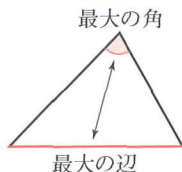
- 「1 辺と 2 つの角」が与えられたときは、正弦定理を利用する。
- 「2 辺とその間の角」, 「3 辺」が与えられたときは、余弦定理を利用する。
- 正弦定理から、3 辺の比と正弦 (sin) の比は一致する。

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

#### 2 三角形の辺と角の大小関係

三角形の辺と角の大小関係について、次のことが知られている。

三角形の 2 辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。



## 4 章

図形と計量

### 練習 27

教 p.154

$\triangle ABC$  において、 $a = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{3} + 1$ ,  $B = 45^\circ$  のとき、残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

指針 三角形の形状 余弦定理を使って、 $b$ ,  $A$  の順に求める。

解答 余弦定理により

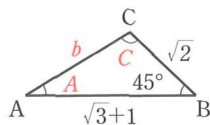
$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= (3 + 2\sqrt{3} + 1) + 2 - 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$b > 0 \text{ であるから } b = \sqrt{4} = 2 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} \text{余弦定理により } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{4(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ であるから } A = 30^\circ \quad \text{答}$$

$$\text{よって } C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \quad \text{答}$$



■  
深める

教科書例題 8 において,  $c$  を求めた後,  $A$  を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

$$\text{正弦定理により} \quad \frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{よって} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① より  $A=45^\circ, 135^\circ$  であるが, 例題 8 では  $A=135^\circ$  は適さない。  
その理由を説明してみよう。

**指針** 三角形の内角の和は  $180^\circ$  で,  $C=60^\circ$  であることからすぐにわかる。

**解答**  $A=135^\circ$  とすると,  $A+C=135^\circ+60^\circ=195^\circ$  となり, 三角形の内角の和  $180^\circ$  より大きくなってしまいうから。 **終**

練習  
28

$\triangle ABC$  において次の等式が成り立つとき, この三角形の最大の角の大きさを求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$$

**指針** 三角形の辺と角 等式より, 最大辺は  $c$  すなわち辺  $AB$  であることがわかるから, 最大角は, 辺  $AB$  の対角  $C$  である。余弦定理を利用する。

**解答** 正弦定理により  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$\text{よって} \quad a : b : c = 8 : 7 : 13$$

このとき, 正の数  $k$  を用いて

$$a=8k, b=7k, c=13k$$

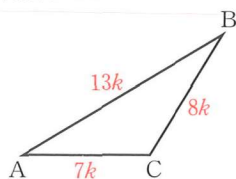
と表すことができる。

$c$  が最大の辺であるから,  $C$  が最大の角である。

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 7k} \\ &= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって  $C=120^\circ$  **答**



## 7 三角形の面積

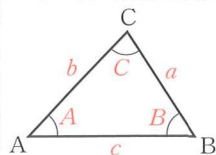
## A 三角形の面積と正弦

まとめ

## 三角形の面積

△ABC の面積  $S$  は、次の式で表される。

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

練習  
29次のような △ABC の面積  $S$  を求めよ。

- (1)  $b=10, c=8, A=45^\circ$
- (2)  $a=6, c=5, B=150^\circ$
- (3) 1 辺の長さが  $a$  の正三角形 ABC

教 p.157

4  
章

図形と計量

指針 三角形の面積 上のまとめの公式を利用する。

解答 (1)  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \quad \text{答}$$

(2)  $S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{答}$

(3)  $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{答}$

## B 多角形の面積

まとめ

## 三角形の 3 辺の長さ と面積

△ABC の 3 辺の長さ  $a, b, c$  が与えられたとき、次の手順でその面積を求める。

- ① 余弦定理  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  により、 $\cos A$  を求める。
- ② 三角比の相互関係  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  から  $\sin A$  を求める。
- ③ △ABC の面積  $S$  を  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$  によって求める。

注意  $\cos B$  や  $\cos C$  から求めても結果は同じである。

練習  
30

教 p.157

3 辺の長さが次のような  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。

(1)  $a=8, b=5, c=7$

(2)  $a=13, b=14, c=15$

指針 三角形の 3 辺の長さから面積  $\triangle ABC$  の 3 辺の長さ  $a, b, c$  が与えられているから、 $\cos A \rightarrow \sin A \rightarrow$  面積 の順に求める。もちろん、 $\cos B \rightarrow \sin B \rightarrow$  面積、または  $\cos C \rightarrow \sin C \rightarrow$  面積 と求めてもよい。

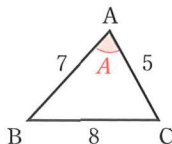
解答 (1) 余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

 $\sin A > 0$  であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3} \quad \text{答}$$



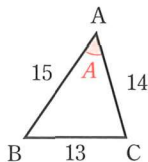
(2) 余弦定理から

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

 $\sin A > 0$  であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84 \quad \text{答}$$

練習  
31

教 p.158

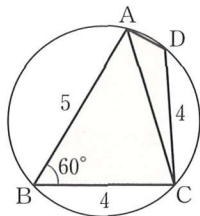
円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=5, BC=4, CD=4, \angle B=60^\circ$  のとき、四角形 ABCD の面積  $S$  を求めよ。

指針 円に内接する四角形の面積  $\triangle ABC$  と  $\triangle ACD$  の 2 つに分けて、2 辺の長さとその間の角の大きさを使って、三角形の面積を求める。円に内接する四角形では、向かい合う角の和は  $180^\circ$  である。

解答 A と C を結んで、 $\triangle ABC$  と  $\triangle ACD$  に分ける。 $\triangle ABC$  に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 16 - 20 = 21 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \sqrt{21}$$



四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$AD = x$  として,  $\triangle ACD$  に余弦定理を使うと

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cos \angle D$$

$$\text{ゆえに} \quad 21 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cos 120^\circ$$

$$\text{整理して, } x^2 + 4x - 5 = 0 \text{ から} \quad (x-1)(x+5) = 0$$

$$\text{よって} \quad x = 1, -5$$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad x = 1 \quad \text{すなわち} \quad AD = 1$$

したがって, 四角形 ABCD の面積  $S$  は

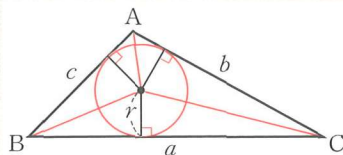
$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

### C 三角形の内接円と面積

まとめ

#### 1 三角形の内接円

右の図のように, 1 つの円が  $\triangle ABC$  の 3 辺すべてに接しているとき, この円を  $\triangle ABC$  の内接円という。



#### 2 三角形の内接円と面積

右の図のような  $\triangle ABC$  の面積を  $S$ ,  $\triangle ABC$  の内接円の半径を  $r$  とするとき

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

練習  
32

教 p.159

$\triangle ABC$  において,  $a=4$ ,  $b=3$ ,  $c=2$  のとき, この三角形の内接円の半径  $r$  を求めよ。

指針 三角形の内接円の半径 三角形の 2 辺の長さとその間の角の大きさから面積を求める。また,  $r$  を用いて三角形の面積を表し,  $r$  を求める。

解答 余弦定理により

$$\cos A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

$$\sin A > 0 \text{ であるから } \sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{また } S = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r(4+3+2) = \frac{9}{2}r$$

$$\text{よって, } \frac{9}{2}r = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ から } r = \frac{\sqrt{15}}{6} \quad \text{答}$$

## 発展 ヘロンの公式

まとめ

### ヘロンの公式

3 辺の長さが  $a, b, c$  の三角形の面積  $S$  は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

教 p.160

練習  
13 辺の長さが 7, 8, 13 である三角形の面積  $S$  を求めよ。

指針 三角形の面積 (ヘロンの公式) 三角形の 3 辺の長さが  $a, b, c$  のとき, その三角形の面積  $S$  は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

解答 3 辺の長さが 7, 8, 13 であるから

$$7 + 8 + 13 = 28$$

よって,  $\frac{28}{2} = 14$  であるから, ヘロンの公式により

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{14(14-7)(14-8)(14-13)} \\ &= \sqrt{14 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1} \\ &= 14\sqrt{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

## 8 空間図形への応用

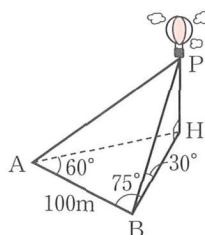
まとめ

## 空間図形への応用

空間図形においても、線分や角を三角形の辺や角としてとらえると、正弦定理や余弦定理などが利用できる。

## 練習 33

100 m 離れた 2 地点 A と B から、気球 P の真下で B と同じ標高の地点 H を見たとき、  
 $\angle HAB = 60^\circ$ ,  $\angle HBA = 75^\circ$   
 であった。また、B から P を見上げた角度は  $30^\circ$  であった。  
 図において、気球 P の高さ PH を求めよ。



教 p.161

**指針** 気球の高さを求める 図で、 $PH = BH \tan 30^\circ$  である。そこで、 $\triangle ABH$  に正弦定理を使って、まず BH の長さを求める。

**解答**  $\angle AHB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

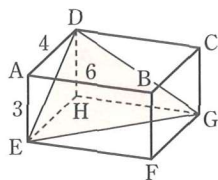
$$\triangle ABH \text{ に正弦定理を使うと } \frac{BH}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{ゆえに } BH = 100 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{6}$$

$$\text{よって } PH = BH \tan 30^\circ = 50\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2} \text{ (m)} \quad \text{答}$$

## 練習 34

右の図のように、  
 $AB=6$ ,  $AD=4$ ,  $AE=3$   
 である直方体 ABCD-EFGH がある。  
 $\triangle DEG$  の面積 S を求めよ。



教 p.162

**指針** 三角形の 3 辺の長さ と面積 次の手順にしたがって面積を求める。

- ① 三平方の定理を用いて、DE, EG, DG の長さを求める。
- ②  $\triangle DEG$  に余弦定理を使って、 $\cos \angle DEG$  を求める。
- ③  $\sin^2 \angle DEG + \cos^2 \angle DEG = 1$  から、 $\sin \angle DEG$  を求める。
- ④  $\triangle DEG$  の面積を、 $S = \frac{1}{2} DE \cdot EG \sin \angle DEG$  から求める。

## 4 章

図形と計量

**解答** 三平方の定理により

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \text{よって} \quad DE = 5$$

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \quad \text{よって} \quad EG = 2\sqrt{13}$$

$$DG^2 = CG^2 + CD^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \quad \text{よって} \quad DG = 3\sqrt{5}$$

$\triangle DEG$  において、余弦定理により

$$\cos \angle DEG = \frac{DE^2 + EG^2 - DG^2}{2 \cdot DE \cdot EG} = \frac{25 + 52 - 45}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{8}{5\sqrt{13}}$$

$\sin \angle DEG > 0$  であるから

$$\sin \angle DEG = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DEG} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{29}}{5\sqrt{13}}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{13} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5\sqrt{13}} = 3\sqrt{29} \quad \text{答}$$

## 研究 正四面体の体積

教 p.163

練習  
1

$PA = PB = PC = 3$ ,  $AB = BC = CA = 4$  である三角錐  $PABC$  の体積  $V$  を求めよ。

**指針** **三角錐の体積** 頂点  $P$  から  $\triangle ABC$  に垂線  $PH$  を下ろすと、点  $H$  は  $\triangle ABC$  の外心である。正弦定理と三平方の定理を利用する。

**解答** 頂点  $P$  から底面の  $\triangle ABC$  に垂線  $PH$  を下ろすと、 $\triangle PAH$ ,  $\triangle PBH$ ,  $\triangle PCH$  はいずれも直角三角形で

$PA = PB = PC$ ,  $PH$  は共通

であるから、これらの直角三角形は合同である。

ゆえに  $AH = BH = CH$ , すなわち、点  $H$  は

$\triangle ABC$  の外接円の中心であり、 $AH$  はその半径である。

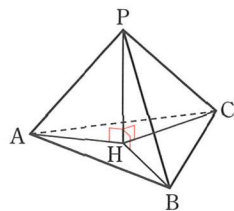
$\triangle ABC$  は 1 辺の長さが 4 の正三角形であるから、正弦定理により

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2AH \quad \text{よって} \quad AH = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$\triangle PAH$  は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$PH = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると



$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

したがって、求める体積  $V$  は

$$V = \frac{1}{3} S \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{4\sqrt{11}}{3} \quad \text{答}$$

## 第4章 第2節

## 問題

教 p.164

- 6  $\triangle ABC$  において、 $a:b=7:3$ 、 $A=60^\circ$  のとき、 $\sin B$  の値を求めよ。

指針 正弦定理の利用 正弦定理により、 $\triangle ABC$  において  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  が成り立つ。

解答 正弦定理により  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

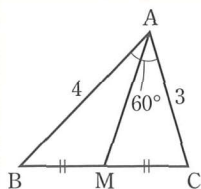
$a:b=7:3$  から、正の数  $k$  を用いて  $a=7k$ 、 $b=3k$  と表される。

ゆえに  $\frac{7k}{\sin 60^\circ} = \frac{3k}{\sin B}$

よって  $\sin B = 3k \cdot \frac{\sin 60^\circ}{7k} = \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \quad \text{答}$

- 7  $\triangle ABC$  において、 $c=4$ 、 $b=3$ 、 $A=60^\circ$  とし、辺  $BC$  の中点を  $M$  とする。このとき、次のものを求めよ。

- (1)  $BM$  の長さ (2)  $\cos B$  の値  
(3)  $AM$  の長さ



教 p.164

指針 余弦定理の利用 (1) まず、 $BC$  の長さを余弦定理を用いて求める。

- (3)  $\triangle ABM$  に余弦定理を用いる。

解答 (1)  $\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos 60^\circ = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 13$$

よって、 $BC = \sqrt{13}$  であり  $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{答}$

- (2)  $\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4^2 + (\sqrt{13})^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} \left( = \frac{5\sqrt{13}}{26} \right) \quad \text{答}$$

- (3)  $\triangle ABM$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned}
 AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B = 4^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} \\
 &= \frac{37}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } AM = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} \quad \text{答}$$

教 p.164

8 次の図形の面積を求めよ。

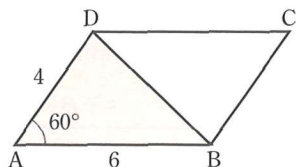
- (1)  $AB=6$ ,  $AD=4$ ,  $\angle A=60^\circ$  である平行四辺形 ABCD  
 (2) 半径 2 の円に内接する正十二角形

指針 三角形の面積の応用

- (1) 平行四辺形は対角線によって、2つの合同な三角形に分けられるから  
 $\square ABCD = 2\triangle ABD$   
 (2) 正十二角形を解答の図のようにして、12個の二等辺三角形に分ける。1つの  $\triangle AOB$  の面積を求め、12倍すればよい。

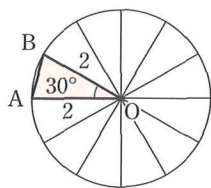
解答 (1) 平行四辺形 ABCD の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= 2\triangle ABD \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 60^\circ \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= 12\sqrt{3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



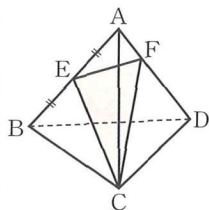
- (2) 正十二角形の面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= 12\triangle AOB \\
 &= 12 \times \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 30^\circ \\
 &= 12 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 12 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$



教 p.164

- 9 1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD において、  
 辺 AB の中点を E, 辺 AD を 1:2 に分ける点  
 を F とする。 $\triangle CEF$  の面積  $S$  を求めよ。



**指針 空間図形への応用** まず  $\triangle CEF$  の3辺の長さを求め、余弦定理を用いて1つの角の余弦を求める。これを利用して正弦を求め、面積の公式にあてはめる。

**解答**  $\triangle ACE$  において、 $AC=6$ 、 $\angle CAE=60^\circ$  であるから

$$CE=AC \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$\triangle AEF$  において

$$AE=\frac{1}{2}AB=3, AF=\frac{1}{1+2}AD=2, \angle EAF=60^\circ$$

よって  $EF^2=AE^2+AF^2-2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos \angle EAF$

$$=9+4-12 \cdot \frac{1}{2}=7$$

$EF>0$  であるから  $EF=\sqrt{7}$

頂点Cから辺ADに垂線CHを下ろすと

$$CH=CE=3\sqrt{3}$$

$$AH=\frac{1}{2}AD=3$$

$$FH=AH-AF=3-2=1$$

$\triangle CFH$  において

$$CF^2=CH^2+FH^2=27+1=28$$

$CF>0$  であるから

$$CF=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

$\triangle CEF$  において、 $CE=3\sqrt{3}$ 、 $EF=\sqrt{7}$ 、 $CF=2\sqrt{7}$  であるから、余弦定理により

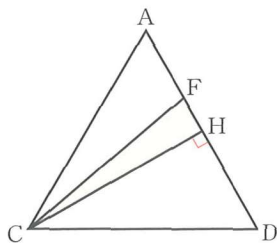
$$\cos \angle CEF = \frac{CE^2 + EF^2 - CF^2}{2 \cdot CE \cdot EF} = \frac{27 + 7 - 28}{2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$\sin \angle CEF > 0$  であるから

$$\sin \angle CEF = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{21}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$$

したがって  $S = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF \cdot \sin \angle CEF$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = 3\sqrt{5} \quad \text{答}$$



## 4章

### 図形と計量

10  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求める公式

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A, S = \frac{1}{2}ca \sin B, S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \quad (r \text{ は } \triangle ABC \text{ の内接円の半径})$$

から、次のものをすべて用いて  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求める公式を作り出せ。

- (1) 3 辺の長さ  $a, b, c$  と外接円の半径  $R$
- (2) 3 つの角の大きさ  $A, B, C$  の正弦と外接円の半径  $R$ , 内接円の半径  $r$

## 指針 三角形と外接円, 内接円

- (1) 外接円の半径  $R$  があるから、正弦定理を使うことを考える。
- (2) 内接円の半径  $r$  があるから、与えられた公式  $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$  を使う。

解答 (1)  $\triangle ABC$  において、正弦定理により  $\sin C = \frac{c}{2R}$

$$\text{これを } S = \frac{1}{2}ab \sin C \text{ に代入すると} \quad S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

$$\boxed{\text{答}} \quad S = \frac{abc}{4R}$$

- (2)  $\triangle ABC$  において、正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{すなわち} \quad a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

$$\text{これらを } S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{ に代入すると}$$

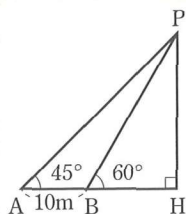
$$S = \frac{1}{2}r(2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C)$$

$$\text{よって} \quad S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C) \quad \boxed{\text{答}}$$

## 第4章 章末問題 A

教 p.165

1. 地点Aから塔の先端Pを見上げた角度は  $45^\circ$  であった。次に塔へ向かって水平に 10 m 近づいた地点BからPを見上げた角度は  $60^\circ$  であった。右の図のようにPの真下の地点をHとする。目の高さを無視するとき、次のものを求めよ。



- (1) B, H 間の距離 (2) 塔の高さ PH

指針 2 地点間の距離と塔の高さを求める  $BH=x$  として、直角三角形 PBH, PAH に着目する。PH は共通であるから、次のように 2 通りに表される。

$$PH=BH \tan 60^\circ, \quad PH=AH \tan 45^\circ \quad (\text{単位は m})$$

解答 (1)  $BH=x$  (m) とおくと  $AH=x+10$

$$\begin{aligned} \triangle PBH \text{ において} \quad PH &= BH \tan 60^\circ \\ &= x \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle PAH \text{ において} \quad PH &= AH \tan 45^\circ \\ &= (x+10) \cdot 1 = x+10 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{3}x = x+10$$

$$\text{整理して} \quad (\sqrt{3}-1)x=10$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad x &= \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

$$\text{答} \quad 5(\sqrt{3}+1) \text{ m}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (1) \text{ から} \quad PH &= \sqrt{3}x \\ &= \sqrt{3} \times 5(\sqrt{3}+1) = 5(\sqrt{3}+3) \end{aligned}$$

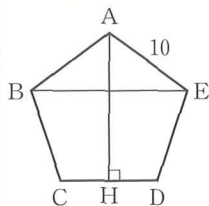
$$\text{答} \quad 5(\sqrt{3}+3) \text{ m}$$

教 p.165

2. 1 辺の長さが 10 の正五角形 ABCDE において、次の線分の長さを求めよ。ただし、小数第 2 位を四捨五入せよ。また、教科書巻末の見返しの三角比の表を用いてよい。

(1) 対角線 BE

(2) 頂点Aから辺CDに下ろした垂線 AH



指針 三角比の応用 まず、正五角形の内角の和は  $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$   
1 つの内角の大きさは、これを 5 等分して  $108^\circ$  になる。

- (1) 対角線 BE は、二等辺三角形 ABE の底辺である。  
 (2) 対角線 AC を結んで、直角三角形 ACH で考えると  
 $CH=5$ ,  $\angle ACH=72^\circ$

**解答** (1) 二等辺三角形 ABE において、

$$\angle BAE=108^\circ \text{ から}$$

$$\angle ABF=\angle AEF=36^\circ$$

直角三角形 ABF において

$$BF=AB \cos 36^\circ$$

$$=10 \times 0.8090=8.090$$

$$\text{よって } BE=2BF=2 \times 8.090$$

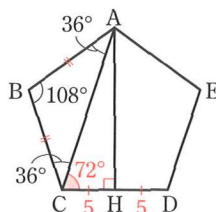
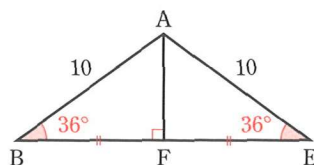
$$=16.18 \div 16.2 \quad \text{答}$$

- (2)  $\angle ACH=108^\circ-36^\circ=72^\circ$ ,  $CH=5$

よって、直角三角形 ACH において

$$AH=CH \times \tan 72^\circ=5 \times 3.0777$$

$$=15.3885 \div 15.4 \quad \text{答}$$



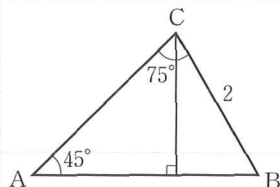
教 p.165

3.  $\triangle ABC$  において、

$$BC=2, \angle BAC=45^\circ, \angle ACB=75^\circ$$

である。

- (1) 辺 AB の長さを求めよ。  
 (2)  $\sin 75^\circ$  と  $\cos 75^\circ$  の値を求めよ。



**指針** 正弦定理, 余弦定理の利用

- (1)  $\triangle ABC$  は、2つの三角定規を組み合わせた形になっている。  
 (2)  $\triangle ABC$  において正弦定理, 余弦定理を利用する。

**解答** (1) Cから辺 AB に垂線 CH を下ろす。

$$\triangle ABC \text{ において } \angle B=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$$

よって、 $\triangle BCH$  は  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  の角をもつ直角三角形であるから

$$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}, BH=\frac{1}{2}BC=1$$

$$\triangle ACH \text{ において } \angle ACH=75^\circ-30^\circ=45^\circ$$

よって、 $\triangle ACH$  は直角二等辺三角形であるから

$$AH=CH=\sqrt{3}$$

$$\text{したがって } AB=AH+BH=\sqrt{3}+1 \quad \text{答}$$

- (2)  $\triangle ABC$  において、正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin 75^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot AB \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{答}$$

(1) より,  $CA = \sqrt{2} \cdot AH = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$  であるから  $\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} \\ &= \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3}+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{10 - (3 + 2\sqrt{3} + 1)}{4\sqrt{6}} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.165

## 4章

## 図形と計量

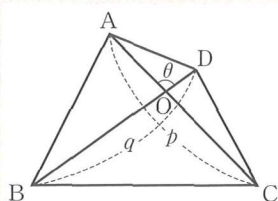
4. 右の図のような四角形 ABCD の 2 本の

対角線の交点を O とし,

$$\angle AOD = \theta, \quad AC = p, \quad BD = q$$

とする。この四角形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} pq \sin \theta \quad \text{であることを示せ。}$$



**指針** 正弦と三角形の面積  $\triangle ABC$  と  $\triangle ADC$  の面積の和として考える。AC を 2 つの三角形の底辺とみると, 高さを  $\sin \theta$  で表すことができる。

**解答** 頂点 B から辺 AC に垂線 BH を下ろす。

$$\triangle OBH \text{ において} \quad \sin(180^\circ - \theta) = \frac{BH}{OB}$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ であるから} \quad BH = OB \sin \theta$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB \sin \theta$$

頂点 D から辺 AC に垂線 DI を下ろす。

$$\triangle ODI \text{ において} \quad \sin \theta = \frac{DI}{OD}$$

$$\text{ゆえに} \quad DI = OD \sin \theta$$

$$\text{よって} \quad \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DI = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OD \sin \theta$$

したがって, 四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OB \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot OD \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC (OB + OD) \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \sin \theta \\
 &= \frac{1}{2} pq \sin \theta \quad \text{終}
 \end{aligned}$$

教 p.165

5.  $\triangle ABC$  において,  $AB=8$ ,  $AC=4$ ,  $A=120^\circ$  であるとする。 $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とするとき,  $AD$  の長さを求めよ。

**指針** 三角形の角の二等分線の長さ 条件から  $\triangle ABC$  の面積はすぐに求められる。また,  $\angle A$  の半分は  $60^\circ$  であるから, 求める線分  $AD$  の長さを  $x$  とおくと,  $\triangle ABD$  と  $\triangle ADC$  の面積はそれぞれ  $x$  の 1 次式で表される。そして,  $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$  から  $x$  の値を求める。

**解答**  $\triangle ABC$  の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

また,  $AD=x$  とすると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{ であるから } 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x = 8\sqrt{3}$$

$$\text{よって, } 3\sqrt{3}x = 8\sqrt{3} \text{ から } x = \frac{8}{3} \quad \text{答}$$

## 第4章 章末問題 B

教 p.166

6.  $\triangle ABC$  において,  $b=2\sqrt{3}$ ,  $c=2$ ,  $C=30^\circ$  のとき, 残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

**指針** 三角形の辺と角の決定 正弦定理により  $\sin B$  の値から  $B$  が 2 つ求められる。それぞれの場合に分けて,  $A$  は内角の和が  $180^\circ$  から,  $A$  は 3 つの角の大きさからそれぞれ求める。

**解答** 正弦定理により  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$

$$\text{よって } 2\sin B = 2\sqrt{3} \sin 30^\circ$$

$$\text{ゆえに} \quad \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって  $B=60^\circ$  または  $B=120^\circ$

[1]  $B=60^\circ$  のとき

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

よって,  $AB:BC=1:2$  から  $BC=2AB$

したがって  $a=2 \cdot 2=4$

[2]  $B=120^\circ$  のとき

$$A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

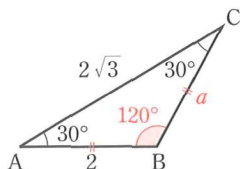
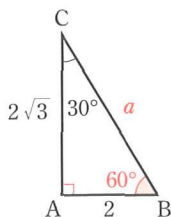
$A=C=30^\circ$  であるから  $AB=BC$

よって  $a=2$

[1], [2] から

$a=4, A=90^\circ, B=60^\circ$  または

$a=2, A=30^\circ, B=120^\circ$  答

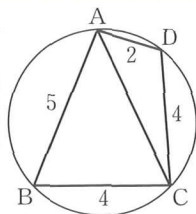


## 4章

図形と計量

教 p.166

7. 円に内接する四角形 ABCD において,  
 $AB=5, BC=4, CD=4, DA=2$   
 のとき, 四角形 ABCD の面積を求めよ。



指針 円に内接する四角形の面積  $\triangle ABC$  と  $\triangle ACD$  に分けて求める。 $\angle B=\theta$  とおくと  $\angle D=180^\circ-\theta$  であることから,  $AC^2$  を  $\cos \theta$  を用いて 2 通りの式で表す。

解答  $\angle B=\theta$  とおく。

$\triangle ABC$  において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \theta = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos \theta \\ &= 41 - 40 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから  $\angle D=180^\circ-\theta$

$\triangle ACD$  において, 余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cos \angle D \\ \cos \angle D &= \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ であるから} \\ AC^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-\cos \theta) = 20 + 16 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② から  $41 - 40 \cos \theta = 20 + 16 \cos \theta$

$\cos \theta$  について解くと  $\cos \theta = \frac{3}{8}$

$$\sin\theta > 0 \text{ であるから } \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\text{ゆえに } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{5\sqrt{55}}{4}$$

$$\begin{aligned} \triangle ACD &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin\theta \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{\sqrt{55}}{2} \end{aligned}$$

よって、四角形 ABCD の面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{5\sqrt{55}}{4} + \frac{\sqrt{55}}{2} = \frac{7\sqrt{55}}{4} \quad \text{答}$$

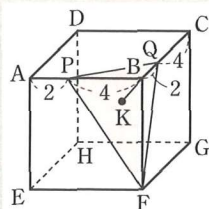
**参考** 円に内接する4辺の長さが  $a, b, c, d$  の四角形の面積を  $S$ ,

$$\frac{a+b+c+d}{2} = s \text{ とすると } S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \text{ が成り立つ。}$$

教 p.166

8. 1 辺の長さが 6 の立方体 ABCD-EFGH において、辺 AB, BC 上に、それぞれ右の図のような点 P, Q をとる。

- (1)  $\triangle PFQ$  の面積を求めよ。
- (2) B から  $\triangle PFQ$  に下ろした垂線 BK の長さを求めよ。



**指針** 空間図形への応用

- (1) まず、三平方の定理を用いて、PQ, PF, FQ の長さを求める。そして、 $\triangle PFQ$  において、余弦定理により  $\cos \angle PQF$  を求める。

$$\triangle PFQ = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot FQ \sin \angle PQF$$

- (2) 三角錐 B-PFQ の体積を 2 通りに表す。

**解答** (1)  $PB=4, BQ=2$  であるから

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad \text{よって } PQ = 2\sqrt{5}$$

$$PF^2 = PB^2 + BF^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \quad \text{よって } PF = 2\sqrt{13}$$

$$FQ^2 = BQ^2 + BF^2 = 2^2 + 6^2 = 40 \quad \text{よって } FQ = 2\sqrt{10}$$

$\triangle PFQ$  において、余弦定理により

$$\cos \angle PQF = \frac{PQ^2 + FQ^2 - PF^2}{2 \cdot PQ \cdot FQ} = \frac{20 + 40 - 52}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \angle PQF > 0 \text{ であるから } \sin \angle PQF = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \triangle PFQ &= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot FQ \sin \angle PQF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \\ &= 14 \quad \text{答} \end{aligned}$$

- (2)  $\triangle BPF$  を底面とし、 $BQ$  を高さとする三角錐と、 $\triangle PFQ$  を底面とし、 $BK$  を高さとする三角錐は同じ立体で、体積は等しい。

$$\text{ゆえに } \frac{1}{3} \triangle BPF \cdot BQ = \frac{1}{3} \triangle PFQ \cdot BK$$

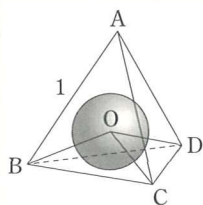
$$\text{すなわち } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot BK$$

$$\text{よって } BK = \frac{12}{7} \quad \text{答}$$

## 研究

9. 1 辺の長さが 1 の正四面体  $ABCD$  に内接する球の中心を  $O$  とする。

- (1) 正四面体  $ABCD$  の体積  $V$  を求めよ。
- (2) 四面体  $OBCD$  の体積  $V'$  を求めよ。
- (3) 球の半径  $r$  を求めよ。



教 p.166

## 4 章

## 図形と計量

指針 四面体の体積，正四面体に内接する球の半径

- (1) 教科書 163 ページの例 1 参照。
- (2) 正四面体  $ABCD$  の立体の対称性により、4 つの三角錐  $O-ABC$ ， $O-BCD$ ， $O-CDA$ ， $O-DAB$  はすべて合同な正三角錐である。よって、正四面体  $ABCD$  の体積は  $4V'$  である。
- (3) 三角錐  $O-BCD$  の底面を  $\triangle BCD$  とすると、高さは球の半径に等しくなる。

$$\text{よって、三角錐 } O-BCD \text{ の体積 } V' \text{ は } V' = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot r$$

解答 (1) 頂点  $A$  から底面の正三角形  $BCD$  に垂線  $AH$  を下ろす。

$\triangle ABH$ ， $\triangle ACH$ ， $\triangle ADH$  はいずれも直角三角形であり

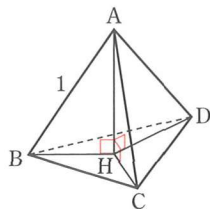
$$AB=AC=AD, AH \text{ は共通}$$

であるから、これらの直角三角形は合同である。

$$\text{ゆえに } BH=CH=DH$$

よって、 $H$  は  $\triangle BCD$  の外接円の中心であり、 $BH$  は  $\triangle BCD$  の外接円の半径である。

$\triangle BCD$  は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから、正弦定理により



$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{すなわち} \quad BH = \frac{1}{2\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ゆえに} \quad AH = \sqrt{1^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\triangle BCD \text{ の面積 } S \text{ は } S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{よって} \quad V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad \text{答}$$

$$(2) \quad V = 4V' \text{ であるから } \frac{\sqrt{2}}{12} = 4V'$$

$$\text{よって} \quad V' = \frac{\sqrt{2}}{48} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad V' = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot r \text{ であるから } \frac{\sqrt{2}}{48} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r$$

$$\text{よって} \quad r = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad \text{答}$$